Aufgabe 3.4:

Es soll ein Teil des Graphen der Funktion $y = -a\sqrt{x} + b$ gezeichnet werden $(a, b \in \mathbb{N}^+)$ mit Hilfe des Mittelpunktalgorithmus gezeichnet werden.

(a) Für welche x-Werte liegt die Steigung zwischen -1 und 0?

(b) Schreiben Sie die Funktionsgleichung in geeigneter Weise in impliziter Form $F(x, y) = 0$. Verwenden Sie $d = F(x, y)$ als Entscheidungsvariable zur Entwicklung des Mittelpunktalgorithmus für die Funktion. Wie muss d verändert werden in Abhängigkeit davon, ob der östliche (O) oder der südöstliche (SO) Punkt beim Mittelpunktalgorithmus gezeichnet wurde?

(c) Wie muss der Startwert d_{init} für d gewählt werden, wenn der erste zu zeichnende Punkt $(x_0, y_0) = (a^2, -a^2 + b)$ ist?

(d) Wie lassen sich die gebrochen rationalen Werte in der Entscheidungsvariable – beim Startwert und bei der jeweiligen Neuberechnung – vermeiden?

Lösungsskizze:

(a) $y' = \frac{-a}{2\sqrt{x}} < 0$.

$y' \geq -1$ genau dann, wenn $x \geq \frac{a^2}{4}$

(b) $y = -a\sqrt{x} + b \;\Leftrightarrow\; (y - b) = -a\sqrt{x}$. Unter der Voraussetzung, dass $x > 0$ und $y \leq b$ gilt, ist dies äquivalent zu $(y-b)^2 = a^2 x$ bzw. $a^2 x - (y-b)^2 = 0$.

Wähle daher:

$$d \;=\; F(x, y) = a^2 x - (y - b)^2$$

Fall 1: O, d.h. $(x_{p+1}, y_{p+1}) = (x_p + 1, y_p)$ war das nach (x_p, y_p) zu zeichnende Pixel.

$$d_{\text{neu}} \;=\; F\left(x_p + 2, y_p - \frac{1}{2}\right) \;=\; a^2 \cdot (x_p + 2) - \left(y_p - \frac{1}{2} - b\right)^2$$

$$d_{\text{alt}} \;=\; F\left(x_p + 1, y_p - \frac{1}{2}\right) \;=\; a^2 \cdot (x_p + 1) - \left(y_p - \frac{1}{2} - b\right)^2$$

$$\Delta_O \;=\; d_{\text{neu}} - d_{\text{alt}} \;=\; a^2.$$

Fall 2: SO, d.h. $(x_{p+1}, y_{p+1}) = (x_p + 1, y_p - 1)$ war das nach (x_p, y_p) zu zeichnende Pixel.

$$d_{\text{neu}} = F\left(x_p + 2, y_p - \frac{3}{2}\right) = a^2 \cdot (x_p + 2) - \left(y_p - \frac{3}{2} -\right)^2$$

$$\Delta_{SO} = d_{\text{neu}} - d_{\text{alt}} = a^2 + 2(y_p - b) + 2$$

(c) Initialisierung:

$$d_{\text{init}} = F\left(a^2 + 1, -a^2 + b - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

(d) Betrachte die Entscheidungsvariable $D = 4d$ anstelle von d.