2.1 Fourier-Transformation einfacher Zeitfunktionen

Überprüfen Sie das Vorliegen der Voraussetzungen für die Fourier-Transformierbarkeit. Berechnen Sie ggf. die Fourier-Transformierte und skizzieren sie das Betragsspektrum $|\underline{F}(j\omega)|$ für $\omega \geq 0$. Diskutieren Sie die Symmetrieeigenschaften von f(t) und die Konsequenzen für $\underline{F}(j\omega)$.

a) $f(t) = \begin{cases} A & \text{für} \quad |t| < t_0 \\ 0 & \text{für} \quad |t| > t_0 \end{cases}$ mit festem $A > 0$ und $t_0 > 0$

b) f(t) wie unter a) mit $A = \dfrac{1}{2t_0}$ für $t_0 \to 0$

c) $f(t) = \delta(t - t_0)$

d) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < 0 \\ Ae^{-\lambda t} & \text{für} \quad t > 0 \end{cases}$ mit festem $A > 0$ und <u>variablem</u> $\lambda > 0$

e) $f(t) = \begin{cases} \sin(\omega_0 t) & \text{für } |t| < T/2 \\ 0 & \text{für } |t| > T/2 \end{cases}$ mit festem $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$. Wie groß ist $|\underline{F}(\omega_0)|$?

2.2 Beweis von Transformationsregeln der Fourier-Transformation

Beweisen Sie die Rechenregeln für die Fourier-Transformation für
a) die Verschiebung
b) die Stauchung/Dehnung
des Argumentes im Zeitbereich. Hinweis: Substitutionen verwenden.

2.3 Laplace-Transformation elementarer Zeitfunktionen

Berechnen sie die Laplace-Transformierte von

a) $f(t) = \varepsilon(t)$ b) $f(t) = \delta(t)$ c) $f(t) = t \cdot \varepsilon(t)$ d) $f(t) = \sin(t) \cdot \varepsilon(t)$

2.4 Laplace-Transformation einfacher Zeitfunktionen

Berechnen sie unter Berücksichtigung der Ergebnisse von Aufgabe 2.3 und der Eigenschaften der Laplace-Transformation die Bildfunktion von

a) $f(t) = \varepsilon(t - t_0)$ für $t_0 > 0$ und $t_0 < 0$
b) $f(t) = \delta(t - t_0)$ mit $t_0 > 0$
c) $f(t) = t^2 \cdot \varepsilon(t)$
d) $f(t) = t^n \cdot \varepsilon(t)$ mit $n \in N^*$
e) $f(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot \varepsilon(t)$
f) $f(t) = \cos(\omega_0 t) \cdot \varepsilon(t)$
g) $f(t) = e^{-\alpha t} \cdot \varepsilon(t)$
h) $f(t) = \hat{B} \sin(n\,\omega_0 t + \varphi_{0n}) \cdot \varepsilon(t)$
i) $f(t) = (2 + t) \cdot \varepsilon(t)$
j) $f(t) = t \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot \varepsilon(t)$
k) $f(t) = e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot \varepsilon(t)$

l) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 < t < t_0 \\ 1 & \text{für} \quad t_0 < t < t_0 + T \\ 0 & \text{für} \quad t > t_0 + T \end{cases}$ mit $t_0, T > 0$

m) $f(t) = \begin{cases} t & \text{für} \quad 0 < t < t_0 \\ 2t_0 - t & \text{für} \quad t_0 < t < 2t_0 \\ 0 & \text{für} \quad t > 2t_0 \end{cases}$ mit $t_0 > 0$

n) $f(t) = \begin{cases} \sin(\omega_0 t) & \text{für} \quad 0 < t < T \\ 0 & \text{für} \quad t > T \end{cases}$ mit $\omega_0 = 2\pi/T$

o) der ab $t = t_0 + T$ periodisch fortgesetzten Funktion nach l) mit der Periode $t_0 + T$
p) der ab $t = 2t_0$ periodisch fortgesetzten Funktion nach m) mit der Periode $2t_0$