Version 3 4.4.2004

Das Verhalten **linearer, zeitinvarianter Systeme (LTI[1]-Systeme) mit konzentrierten Parametern** wird mathematisch beschrieben durch **Systeme von gewöhnlichen, linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten**.

Wir betrachten hier nur LTI-Systeme mit einer Eingangs- und einer Ausgangsgröße. Die Erweiterung auf mehrere Eingangsgrößen ist wegen der Anwendbarkeit des Überlagerungssatzes trivial. LTI-Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen können behandelt werden wie mehrere parallele LTI-Systeme mit jeweils nur einer der Ausgangsgrößen.

Regt man ein solches System mit **harmonischen Schwingungen** (Sinusgrößen) unterschiedlicher Kreisfrequenz der Form $\boxed{e(t)=\sqrt{2}\cdot E(\omega)\cdot\sin(\omega t+\varphi_{0E}(\omega))}$ (1)
an, so antwortet es im eingeschwungenen Zustand jeweils mit einer harmonischen Schwingung $\boxed{a(t)=\sqrt{2}\cdot A(\omega)\cdot\sin(\omega t+\varphi_{0A}(\omega))}$ (2)
gleicher Kreisfrequenz, jedoch **für dieses System bei dieser Kreisfrequenz charakteristischer Amplitude und Phasenlage**.

Eingangsgröße (1) und Ausgangsgröße (2) lassen sich im **Bildbereich** als **rotierende Effektivwertzeiger** der Form $\boxed{\underline{e}(t)=E(\omega)e^{j(\omega t+\varphi_{0E}(\omega))}}$ (3)
beziehungsweise $\boxed{\underline{a}(t)=A(\omega)e^{j(\omega t+\varphi_{0A}(\omega))}}$ (4)
beschreiben.

Aus der Analyse von Sinusstromnetzwerken im Bildbereich ist bekannt, dass bei der Differentiation bzw. Integration der Faktor $j\omega$ bzw. sein Kehrwert auftritt. Daher ist es mathematisch sinnvoll, den Ausdruck $j\omega$ statt nur ω als frequenzabhängige Größe zu betrachten.
Man schreibt dann statt (3) $\boxed{\underline{e}(t)=E(j\omega)e^{j(\omega t+\varphi_{0E}(j\omega))}}$ (5)
und statt (4) $\boxed{\underline{a}(t)=A(j\omega)e^{j(\omega t+\varphi_{0A}(j\omega))}}$. (6)

Bei Anregung mit einer **Exponentialschwingung** antwortet ein LTI-System im eingeschwungenen Zustand mit einer Exponentialschwingung gleicher komplexer[2] Frequenz p.
Im Bildbereich werden diese Funktionen in Erweiterung von (5) und (6) beschrieben als[3]
$\boxed{\underline{e}(t)=E(p)\cdot e^{\sigma t}\cdot e^{j(\omega t+\varphi_{0E}(p))}=E(p)\cdot e^{j\varphi_{0E}(p)}\cdot e^{pt}=\underline{E}(p)\cdot e^{pt}}$ (7)
beziehungsweise $\boxed{\underline{a}(t)=\underline{A}(p)\cdot e^{pt}}$. (8)

Die Funktion

$$\boxed{\underline{F}(p)=\frac{\underline{a}(t)}{\underline{e}(t)}=\frac{\underline{A}(p)\cdot e^{pt}}{\underline{E}(p)\cdot e^{pt}}=\frac{\underline{A}(p)}{\underline{E}(p)}=\frac{A(p)\cdot e^{j\varphi_{0A}(p)}}{E(p)\cdot e^{j\varphi_{0E}(p)}}=\frac{A(p)}{E(p)}e^{j(\varphi_{0A}(p)-\varphi_{0E}(p))}} \qquad (9)$$

nennt man die **Übertragungsfunktion** (auch **Systemfunktion**) des LTI-Systems.

Im Spezialfall einer Anregung mit einer Sinusgröße ($\sigma=0$) wird aus der komplexen Frequenz $p=\sigma+j\omega$ wieder der Ausdruck $j\omega$ und damit speziell $\boxed{\underline{F}(j\omega)=\frac{\underline{A}(j\omega)}{\underline{E}(j\omega)}}$. (10)

---

[1] *linear time invariant*
[2] Hier wird, wie in der Fachliteratur leider allgemein üblich, der komplexe Unterstrich bei p weggelassen.
[3] Siehe Arbeitsblatt „Die komplexe Exponentialschwingung"