Version 3 17.10.2004

Definition

Potenzreihen sind **unendliche Reihen**, deren Summanden nicht konstant sind, sondern von einer Variablen abhängen. Sie sind also **Funktionen einer Variablen** in der allgemeinen Form

$$\boxed{P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i} \qquad (1)$$

mit x unabhängige Variable (zunächst gelte $x \in R$)

a_i feste (Entwicklungs-)**Koeffizienten** (zunächst gelte $a_i \in R$)

x_0 fester **Entwicklungspunkt** (zunächst gelte $x_0 \in R$).

Oftmals werden Potenzreihen für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ angegeben. Dann gilt

$$\boxed{P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i} \qquad (2)$$

Die Funktion (1) ergibt sich aus (2) durch Verschiebung auf der x-Achse um x_0 nach rechts.

Konvergenzverhalten

Während unendliche Reihen mit konstanten Summanden entweder konvergieren oder divergieren, kann das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe vom Wert der Variablen x abhängen. Es gibt drei Möglichkeiten:

1. Die Potenzreihe konvergiert nur für den Entwicklungspunkt x_0 mit $P(x_0) = a_0$.
2. Die Potenzreihe konvergiert nur innerhalb eines zum Entwicklungspunkt symmetrischen offenen **Konvergenzintervalls** $]\, x_0 - r; x_0 + r\, [$ auf der x-Achse, also für $\boxed{|x - x_0| < r}$ mit dem **Konvergenzradius** $r \in R^+$. In den Randpunkten des Konvergenzintervalls kann die Potenzreihe jeweils entweder konvergieren oder divergieren (separat zu untersuchen).
3. Die Potenzreihe konvergiert für alle x, d.h. $r \to \infty$.

Im 1. Fall setzt man r = 0.

Eine Potenzreihe ist als Funktion nur innerhalb ihres Konvergenzbereiches definiert.

Der Wert des Konvergenzradius r lässt sich mittels folgender Kriterien berechnen:

Quotientenkriterium: $$\boxed{r = \lim_{i\to\infty} \left| \frac{a_i}{a_{i+1}} \right|} \qquad (3)$$

Wurzelkriterium: $$\boxed{r = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{\sqrt[i]{|a_i|}}} \qquad (4)$$

Aus (3) und (4) ist ersichtlich, dass r ausschließlich von den a_i abhängt, nicht aber von x_0.

Komplexe Potenzreihen

Eine komplexe Potenzreihe ist eine Verallgemeinerung von (1) der Form

$$\boxed{P(\underline{z}) = \sum_{i=0}^{\infty} \underline{c}_i (\underline{z} - \underline{z}_0)^i} \text{ mit } \underline{z}, \underline{z}_0, \underline{c}_i \in C. \qquad (5)$$

Der **Konvergenzradius** $r \in R^+$ beschreibt nun einen **kreisscheibenförmigen Konvergenzbereich** in der **Gaußschen Zahlenebene** um den Entwicklungspunkt $\underline{z}_0$ mit dem Radius r (daher der Name), der mittels der Kriterien (3) oder (4) berechenbar ist.

Auch hier gibt es die drei Fälle $r = 0$, $0 < r < \infty$ und $r \to \infty$. Im zweiten Fall ist das Konvergenzverhalten für den Kreisrand separat zu untersuchen.

Rechnen mit Potenzreihen

Eine Potenzreihe kann aufgefasst werden als Polynom mit unendlich vielen Gliedern. Polynome sind sehr „gutmütige“ Funktionen: sie sind stets stetig sowie einfach beliebig oft differenzierbar und beliebig oft integrierbar:

$$\frac{d}{dx}\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i i\, x^{i-1} \quad \text{und} \quad \int \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i dx = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{1}{i+1} x^{i+1} + C$$

Potenzreihen dürfen innerhalb ihres Konvergenzbereiches

1. beliebig oft (gliedweise) **differenziert** werden;
   der Konvergenzbereich ändert sich dabei nicht
2. beliebig oft (gliedweise) **integriert** werden;
   liegen die Integrationsgrenzen innerhalb des Konvergenzbereiches, so ändert sich der Konvergenzbereich nicht
3. (gliedweise) **addiert**, **subtrahiert** und **multipliziert** werden;
   der Konvergenzbereich ist mindestens die Schnittmenge der Konvergenzbereiche der beteiligten Potenzfunktionen
4. (gliedweise) **mit einer beliebigen Konstanten multipliziert** werden;
   der Konvergenzbereich ändert sich dabei nicht

Praktische Anwendung von Potenzreihen

Sehr viele technisch wichtige Funktionen (u.a. Kreis-, Hyperbel-, Exponential-, Logarithmusfunktionen) lassen sich durch Potenzreihen darstellen, deren Glieder einem relativ einfachen Bildungsgesetz gehorchen. Siehe hierzu Bronstein, Tabelle „Potenzreihenentwicklungen“.

Beispiele:

1. $\sin x = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$, Konvergenzradius: $r \to \infty$

   Da die Sinusfunktion eine ungerade Funktion ist, enthält auch ihre Potenzreihendarstellung ausschließlich ungerade Funktionen, d.h. nur ungerade Potenzen von x.

2. $\cos x = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}$, Konvergenzradius: $r \to \infty$

   Da die Kosinusfunktion eine gerade Funktion ist, enthält auch ihre Potenzreihendarstellung ausschließlich gerade Funktionen, d.h. nur gerade Potenzen von x.

   Die Beziehung $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ ist ganz offensichtlich auch für die Potenzreihendarstellung der beiden Funktionen erfüllt.

3. $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$, Konvergenzradius: $r \to \infty$

   Da die natürliche Exponentialfunktion weder eine gerade noch eine ungerade Funktion ist, enthält ihre Potenzreihendarstellung sowohl gerade als auch ungerade Potenzen von x.

In der numerischen Mathematik werden Funktionswerte häufig mittels der Potenzreihendarstellung von Funktionen berechnet, oftmals in Verbindung mit Stützwerten, die in internen Tabellen fest gespeichert sind.

Für viele Funktionen, die nicht geschlossen integrierbar sind, existieren Potenzreihendarstellungen, die eine Integration ermöglichen, z.B. für das Integral der si-Funktion

$$si(x) = \frac{\sin x}{x} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i+1)!}: \qquad Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)(2i+1)!}.$$

Änderungen in Version 3: Indexanpassung im Abschnitt „Rechnen mit Potenzreihen“; Schreibfehlerkorrektur
Bitte benachrichtigen Sie mich, wenn Sie in diesem Dokument Fehler finden oder Anregungen oder Fragen dazu haben.