Laplace-Transformation

Eigenschaften und Grenzwertsätze

© 2002-2004 Prof. Dr.-Ing. T. Harriehausen

Version 6
1.12.2004

Als Symbol für die Laplace-Transformation wird nachfolgend „L{...}“ verwendet.
Als Originalbereich wird der Zeitbereich angenommen.
<u>Es muss stets f(t<0) = 0 und g(t<0) = 0 gelten. Anderenfalls sind f(t) bzw. g(t) mit ε(t) zu multiplizieren.</u> a und b seien reelle Konstante.
Es sei $L\{f(t)\} = F(p)$ und $L\{g(t)\} = G(p)$ bzw. kurz $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \underline{F}(\underline{p})$ und $g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \underline{G}(\underline{p})$ [1].

1. <u>Linearität</u>

$\boxed{a \cdot f(t) + b \cdot g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, a \cdot \underline{F}(\underline{p}) + b \cdot \underline{G}(\underline{p})}$ für beliebige a, b

Eine Linearkombination von Funktionen im Zeitbereich korrespondiert mit der entsprechenden Linearkombination der Bildfunktionen.
Man darf also z.B. die Ausdrücke auf den beiden Seiten des Korrespondenz-Symbols (wie bei einer Gleichung) mit der selben Konstanten multiplizieren.

2. <u>Stauchung/Dehnung im Zeitbereich bzw. Bildbereich (Ähnlichkeitssätze)</u>

$\boxed{f(a \cdot t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{a} \cdot \underline{F}\left(\frac{\underline{p}}{a}\right)}$ bzw. $\boxed{\underline{F}(a \cdot \underline{p}) \bullet\!\!-\!\!\circ\, \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right)}$ für $a > 0$

$a > 1$ bedeutet eine Stauchung, $0 < a < 1$ eine Dehnung längs der Zeitachse.
Eine Stauchung im Zeitbereich bedeutet eine Dehnung im Bildbereich und umgekehrt.

3. <u>Verschiebung im Zeitbereich (Verschiebungssätze)</u>

a) Verschiebung nach rechts: $\boxed{f(t - t_0) \cdot \varepsilon(t - t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\, e^{-\underline{p}t_0} \cdot \underline{F}(\underline{p})}$ mit $t_0 > 0$

b) Verschiebung nach links: $\boxed{f(t - t_0) \cdot \varepsilon(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, e^{-\underline{p}t_0} \cdot \left[\underline{F}(\underline{p}) - \int_0^{-t_0} f(t)\, e^{-\underline{p}t}\, dt\right]}$ mit $t_0 < 0$

bzw. $\boxed{f(t + t_0) \cdot \varepsilon(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, e^{\underline{p}t_0} \cdot \left[\underline{F}(\underline{p}) - \int_0^{t_0} f(t)\, e^{-\underline{p}t}\, dt\right]}$ mit $t_0 > 0$,

da der links von $t = 0$ liegende Teil der verschobenen Funktion nicht transformiert wird.

4. <u>Exponentielle Dämpfung im Zeitbereich, Verschieb. im Bildbereich (Dämpfungssatz)</u>

$\boxed{e^{-at} \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \underline{F}(\underline{p} + a)}$ für beliebige (auch komplexe) a

$\underline{F}(\underline{p} + a)$ ist gegenüber $\underline{F}(\underline{p})$ um Re(a) in Richtung der σ-Achse nach links verschoben;
für Re(a) > 0 wird f(t) also „harmloser“ und $\underline{F}(\underline{p} + a)$ konvergiert schon für kleinere σ.

5. <u>Differentiation im Zeitbereich</u>

Unter der Voraussetzung, dass alle auftretenden Ableitungen von f(t) für $t > 0$ existieren und Laplace-Transformierte besitzen und ggf. $f^{(i)}(0) = f^{(i)}(+0)$ gewählt wird, gilt:

$\boxed{f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \underline{p} \cdot \underline{F}(\underline{p}) - f(0)}$

$\boxed{f''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \underline{p} \cdot [L\{f'(t)\}] - f'(0) = \underline{p} \cdot [\underline{p} \cdot \underline{F}(\underline{p}) - f(0)] - f'(0) = \underline{p}^2 \cdot \underline{F}(\underline{p}) - \underline{p} \cdot f(0) - f'(0)}$

$\vdots$

$\boxed{f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \underline{p} \cdot [L\{f^{(n-1)}(t)\}] - f^{(n-1)}(0) = \underline{p}^n \cdot \underline{F}(\underline{p}) - \underline{p}^{n-1} \cdot f(0) - \underline{p}^{n-2} \cdot f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)}$

---

[1] In der Literatur wird der komplexe Unterstrich beim $\underline{p}$ meist weggelassen, was relativ unproblematisch ist. Leider wird oft auch der komplexe Unterstrich beim Symbol der Bildfunktion, z.B. $\underline{F}$ oder $\underline{G}$, weggelassen, was zur Folge hat, daß der Betrag dieser Funktion nicht mehr wie üblich einfach mit F oder G bezeichnet werden kann, sondern mit Betragsstrichen in der Form |F(p)| oder |G(p)| geschrieben werden <u>muss</u>.

6. Differentiation im Bildbereich

$\boxed{\underline{F}^{(n)}(\underline{p}) \bullet\!\!-\!\!\circ (-t)^n \cdot f(t)}$ bzw. $\boxed{t^n \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet (-1)^n \cdot \underline{F}^{(n)}(\underline{p})}$

Anwendung bei der Laplace-Transformation, wenn sich eine Zeitfunktion darstellen läßt als Produkt von $(-t)^n$ oder t^n und einer anderen Funktion, deren Bildfunktion bekannt oder einfacher zu berechnen ist.

Anwendung bei der inversen Laplace-Transformation, wenn sich eine zu Bildfunktion auffassen läßt als n-te Ableitung einer anderen Funktion, deren Zeitfunktion bekannt oder einfacher zu berechnen ist.

7. Integration im Zeitbereich

$\boxed{\int_0^t f(\tau)\, d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{\underline{p}} \underline{F}(\underline{p})}$ bzw. allgemein $\boxed{\underbrace{\int_0^t \ldots \int_0 f(\tau_1)\, d\tau_1 \ldots d\tau_n}_{n-\text{faches Integral}} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{\underline{p}^n} \underline{F}(\underline{p})}$

Integration und Differentiation heben sich im Zeitbereich gegenseitig auf, wenn die Anfangswerte $f(0), f'(0), \ldots, f^{(n-1)}(0)$ verschwinden.

8. Integration im Bildbereich

$\boxed{\int_{\underline{p}}^{\infty} \underline{F}(\underline{z})\, d\underline{z} \bullet\!\!-\!\!\circ \frac{1}{t} f(t)}$ bzw. allgemein $\boxed{\underbrace{\int_{\underline{p}} \ldots \int \underline{F}(\underline{z}_1)\, d\underline{z}_1 \ldots d\underline{z}_n}_{n-\text{faches Integral}} \bullet\!\!-\!\!\circ \frac{1}{t^n} f(t)}$

9. Faltung im Zeitbereich[2]

$\boxed{\underline{F}(\underline{p}) \cdot \underline{G}(\underline{p}) \bullet\!\!-\!\!\circ f(t) * g(t)}$ mit $\boxed{f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t-\tau)\, d\tau}$

Das Faltungsprodukt ist kommutativ, assoziativ und distributiv.

10. Periodisierungsfaktor

Wird eine in einem Intervall der Breite T definierte <u>nichtperiodische</u> Funktion f(t) mit der Bildfunktion $\underline{F}(\underline{p})$ durch periodische Fortsetzung <u>nach rechts</u> in eine <u>periodische</u> Funktion überführt, so ergibt sich die Bildfunktion dieser periodischen Funktion zu $\boxed{\underline{F}(\underline{p}) \cdot \frac{1}{1 - e^{-\underline{p}T}}}$.

11. Grenzwertsätze

Anfangswertsatz: $\boxed{\lim_{t \to +0} f(t) = \lim_{\underline{p} \to \infty} \left(\underline{p} \cdot \underline{F}(\underline{p})\right)}$

Endwertsatz: $\boxed{\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{\underline{p} \to 0} \left(\underline{p} \cdot \underline{F}(\underline{p})\right)}$

Die Grenzwertsätze erlauben die Berechnung des Wertes der Zeitfunktion für $t \to 0$ und $t \to \infty$, <u>sofern sie überhaupt existieren</u>, <u>direkt</u> aus der Bildfunktion, also ohne vorherige Rücktransformation.

[2] Es gibt auch eine Faltung im Bildbereich, die wir nicht benötigen.