Setzt man in die **Darstellung der Fourier-Reihe in reeller Form**

$$\boxed{s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left[a_i \cos(i\,\omega_0 t) + b_i \sin(i\,\omega_0 t) \right]} \tag{1}$$

mit $\omega_0 > 0$ und $a_i, b_i \in R$

die aus der Eulerschen Formel

$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$

folgenden Definitionen für die Sinus- und die Kosinusfunktion

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}\right) \tag{2}$$

$$\sin\varphi = -j\frac{1}{2}\left(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}\right) \tag{3}$$

ein, so ergibt sich die Form

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left[a_i \frac{1}{2}\left(e^{ji\,\omega_0 t} + e^{-ji\,\omega_0 t}\right) - jb_i \frac{1}{2}\left(e^{ji\,\omega_0 t} - e^{-ji\,\omega_0 t}\right) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left[e^{ji\,\omega_0 t} \frac{1}{2}(a_i - jb_i) + e^{-ji\,\omega_0 t} \frac{1}{2}(a_i + jb_i) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} e^{ji\,\omega_0 t} \frac{1}{2}(a_i - jb_i) + \sum_{i=-\infty}^{-1} e^{+ji\,\omega_0 t} \frac{1}{2}(a_{-i} + jb_{-i}). \end{aligned} \tag{4}$$

Man <u>definiert</u> nun die **komplexen Fourier-Koeffizienten**

$$\boxed{\underline{c}_i = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_i - jb_i) & \text{für} \quad i > 0 \\ \frac{1}{2}a_0 & \text{für} \quad i = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-i} + jb_{-i}) & \text{für} \quad i < 0 \end{cases}}. \tag{5}$$

Mit ihnen folgt aus (4) die **Darstellung der Fourier-Reihe in komplexer Form**

$$\boxed{s(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \underline{c}_i \, e^{ji\,\omega_0 t}}.$$

Diese sehr kompakte Form enthält auch negative Kreisfrequenzen ($i\omega_0 < 0$ für $i < 0$).

Die Information über Amplitude und Phasenlage der enthaltenen harmonischen Schwingungen mit $i \cdot \omega_0$ ist nun in den jeweiligen Koeffizienten $\underline{c}_i$ enthalten (s.u.).

Aus (5) folgt, dass sich die $\underline{c}_i$ für $i < 0$ sehr einfach aus den $\underline{c}_i$ für $i > 0$ berechnen lassen.

Es gilt nämlich $\boxed{\underline{c}_{-i} = \underline{c}_i\,^*}$. (6)

Daher brauchen zur Berechnung der komplexen Fourier-Reihe einer reellwertigen Funktion f(t) zunächst nur die $\underline{c}_i$ für $i \geq 0$ berechnet zu werden.

Setzt man die Berechnungsvorschriften für die a_i und b_i

$$a_i = \frac{2}{T} \int_{(T)} f(t) \cdot \cos(i\,\omega_0 t)\, dt \quad \text{für} \quad i \geq 0$$

$$b_i = \frac{2}{T} \int_{(T)} f(t) \cdot \sin(i\,\omega_0 t)\, dt \quad \text{für} \quad i > 0$$

in die Definition der $\underline{c}_i$ für i > 0 in (5) ein, so folgt

$$\begin{aligned}\underline{c}_i &= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{T}\int_{(T)} f(t)\cdot\cos(i\,\omega_0 t)\,dt - j\frac{2}{T}\int_{(T)} f(t)\cdot\sin(i\,\omega_0 t)\,dt\right] \\ &= \frac{1}{T}\int_{(T)} f(t)\cdot\left[\cos(i\,\omega_0 t) - j\sin(i\,\omega_0 t)\right]dt\end{aligned} \qquad (7)$$

Setzt man in (7) wieder die Beziehungen (2) und (3) ein, so folgt

$$\begin{aligned}\underline{c}_i &= \frac{1}{T}\int_{(T)} f(t)\cdot\left[\frac{1}{2}\left(e^{ji\omega_0 t} + e^{-ji\omega_0 t}\right) - j\left\{-j\frac{1}{2}\left(e^{ji\omega_0 t} - e^{-ji\omega_0 t}\right)\right\}\right]dt \\ &= \frac{1}{2T}\int_{(T)} f(t)\cdot\left[\left(e^{ji\omega_0 t} + e^{-ji\omega_0 t}\right) - \left(e^{ji\omega_0 t} - e^{-ji\omega_0 t}\right)\right]dt \\ &= \frac{1}{2T}\int_{(T)} f(t)\cdot 2e^{-ji\omega_0 t}\,dt\,,\end{aligned}$$

also

$$\boxed{\underline{c}_i = \frac{1}{T}\int_{(T)} f(t)\cdot e^{-ji\omega_0 t}\,dt}. \qquad (8)$$

Die Beziehung (8) gilt für negative und positive i.
Sind die $\underline{c}_i$ für $\underline{i \ge 0}$ bekannt, so können aus ihnen mittels (5) einfach die a_i und b_i berechnet werden: $\boxed{a_i = 2\,\mathrm{Re}(\underline{c}_i)}$ und $\boxed{b_i = -2\,\mathrm{Im}(\underline{c}_i)}$.

Die <u>Amplituden</u> $\hat{B}_i$ der in (1) enthaltenen harmonischen Schwingungen $\hat{B}_i\sin(i\omega_0 t + \varphi_{0i})$ sind $\hat{B}_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} = \sqrt{(2\,\mathrm{Re}(\underline{c}_i))^2 + (-2\,\mathrm{Im}(\underline{c}_i))^2} = 2\sqrt{(\mathrm{Re}(\underline{c}_i))^2 + (\mathrm{Im}(\underline{c}_i))^2}$,

also $\boxed{\hat{B}_i = 2\left|\underline{c}_i\right|}$. (9)

Die <u>Nullphasenwinkel</u> dieser harmonischen Schwingungen ergeben sich dann[1] aus

$$\tan\varphi_{0i} = \frac{a_i}{b_i} = \frac{2\,\mathrm{Re}(\underline{c}_i)}{-2\,\mathrm{Im}(\underline{c}_i)} = \frac{\mathrm{Re}(\underline{c}_i)}{-\mathrm{Im}(\underline{c}_i)}$$

zu $\boxed{\varphi_{0i} = \arctan\left(\frac{\mathrm{Re}(\underline{c}_i)}{-\mathrm{Im}(\underline{c}_i)}\right) = -\arctan\left(\frac{\mathrm{Re}(\underline{c}_i)}{\mathrm{Im}(\underline{c}_i)}\right)}$ (Quadrantenproblematik beachten!), (10)

Achtung: Es gilt aber $\boxed{\arg(\underline{c}_i) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(\underline{c}_i)}{\mathrm{Re}(\underline{c}_i)}\right)}$. (11)

Liegt die komplexe Fourier-Entwicklung einer Funktion vor, so läßt sich mittels folgender 4 Paare von Spektren graphisch über i, ω oder f darstellen:

1. $\mathrm{Re}(\underline{c}_i)$ und $\mathrm{Im}(\underline{c}_i)$
2. $\left|\underline{c}_i\right|$ und $\arg(\underline{c}_i)$
3. a_i und b_i
4. $\hat{B}_i$ und φ_{0i}

[1] Siehe mein ET II-Arbeitsblatt „Harmonische Schwingungen: Zerlegung in Sinus- und Kosinuskomponenten"

Änderung in Version 3: Gleichungsnumerierung erweitert, Fehler in (10) korrigiert, (11) ergänzt
Fehler bei Bitte benachrichtigen Sie mich, wenn Sie in diesem Dokument Fehler finden oder Anregungen oder Fragen dazu haben.