Version 3 2.11.2004

Betrachtet wird eine **Mischgröße**, also eine allgemeine T-periodische Zeitfunktion

$\boxed{f(t) = f(t + k \cdot T)}$ mit $k \in \mathbf{Z}$, (1)

die einen arithmetischen Mittelwert ungleich Null (**Gleichanteil**) $\boxed{\overline{f(t)} = F_0}$ (2)

enthalten darf.

Im Falle technisch realisierbarer Funktionen ist f(t) **stetig differenzierbar** und exakt beschreibbar durch eine **Fourier-Reihe**, die zum Beispiel in der Form

$$\boxed{f(t) = F_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \hat{F}_i \sin(i\,\omega_0 t + \varphi_{0i})}, \tag{3}$$

darstellbar ist. Dabei gilt $\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T}}$. (4)

Der quadratische Mittelwert (**Effektivwert**) einer beliebigen T-periodischen Funktion f(t) ist allgemein definiert als

$$\boxed{F = F_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{(T)} f^2(t)\, dt}} \tag{5}$$

Setzt man die Funktion (3) in (5) ein, so erhält man

$$F^2 = \frac{1}{T} \int_{(T)} \left(F_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \hat{F}_i \sin(i\,\omega_0 t + \varphi_{0i}) \right)^2 dt\,. \tag{6}$$

Das System der trigonometrischen Funktionen $\sin(i\,\omega_0 t)$ und $\cos(i\,\omega_0 t)$ mit $i \in \mathbf{N}^*$ ist **orthogonal**, d.h. für $m, n \in \mathbf{N}^*$ gilt unter anderem[1]

$$\boxed{\int_{(T)} \sin(m\,\omega_0 t) \cdot \sin(n\,\omega_0 t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ T/2 & \text{für } m = n \end{cases}} \tag{7}$$

(7) gilt auch, wenn die einzelnen Sinusschwingungen beliebige Nullphasenwinkel haben. In (6) entfallen alle Anteile, die ein Produkt von Teilschwingungen unterschiedlicher Frequenz sind und alle Produkte des Gleichanteils mit einer Teilschwingung. Das Integral über das Quadrat des Gleichanteils ergibt $T F_0^2$. Damit folgt

$$F^2 = \frac{1}{T} \left(T F_0^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{T}{2} \hat{F}_i^2 \right). \tag{8}$$

Ersetzt man mittels

$$\boxed{\hat{F}_i = \sqrt{2} F_i} \tag{9}$$

in (8) die **Amplituden** der Teilschwingungen durch ihre Effektivwerte, so folgt

$F^2 = F_0^2 + \sum_{i=1}^{\infty} F_i^2 = \sum_{i=0}^{\infty} F_i^2$ und hieraus der Zusammenhang

$$\boxed{F = \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} F_i^2}}. \tag{10}$$

mit der wichtigen Aussage:

Der Effektivwert einer Mischgröße ist gleich dem geometrischen Mittelwert der Effektivwerte ihrer Komponenten.

[1] Eine ausführliche Darstellung enthält mein Arbeitsblatt „Fourieranalyse“ und jedes gute Mathematik-Buch.

Änderungen in Version 3: Fehlerkorrekturen in (10) und dem vorangehenden Text, zusätzliche Erklärungen, allgemeine Überarbeitung
Bitte benachrichtigen Sie mich, wenn Sie in diesem Dokument Fehler finden oder Anregungen oder Fragen dazu haben.