	Fachhochschule Braunschweig/Wolfenbüttel Fachbereich Elektrotechnik Prof. Dr.-Ing. T. Harriehausen	**Klausur Mathematik II Sommersemester 2004** 25.6.2004
Bearbeitungs-zeit: 120 Minuten	**Anzahl der abgegebenen** **Blätter:** ____________ + 1 Aufgabenblatt + 1 Formelblatt	**Name:** ______________________ **Vorname:** ____________________ **Matrikel-Nr.:** ________________

Erlaubte Hilfsmittel: ausgegebene Formelsammlung, ausgegebener Taschenrechner TI 30.
Alle Antworten sind zu begründen, Lösungswege müssen nachvollziehbar sein!
Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
Bitte schreiben Sie nicht mit roter Farbe und lassen Sie links und rechts ca. 3 cm Rand!

Punkteverteilung

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Σ	Note:
Punkte	20	18	10	13	17	13	30	9	24	12	10	120 + 56	
erreicht													

1) a) Zerlegen Sie die Funktion $f(p) = \dfrac{-p^3 + 8p^2 - 6p + 3}{(p^2+1)(p-1)(p-2)}$ in Partialbrüche.

b) Berechnen Sie den Wert des Integrals $I = \int\limits_0^{10} (x-3)^{-2}\,dx$.

2) a) Berechnen Sie für $\underline{z}_1 = a + jb$, $\underline{z}_2 = c + jd$ die Ausdrücke $\left|\dfrac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right|$ und $\arg\left(\dfrac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right)$.

Berechnen Sie alle Lösungen von

b) $\underline{z}_3^5$ mit $\underline{z}_3 = 2e^{-j\frac{\pi}{2}}$

c) $\sqrt[4]{-16}$

d) $e^{\underline{z}_4}$ mit $\underline{z}_4 = \sqrt{1+j}$

e) $\ln \underline{z}_5$ mit $\underline{z}_5 = \dfrac{2}{j}$

3) a) Unter welchen Voraussetzungen darf man Systeme mittels der komplexen Rechnung analysieren?
b) Mittels welcher Arten von Zeigern kann man harmonische Schwingungen beschreiben?
c) Unter welcher Vorausetzung darf man mehrere harmonische Schwingungen über einer gemeinsamen ωt -Achse auftragen?

4) Entwickeln Sie schrittweise zeichnerisch die qualitative Ortskurve der Eingangsimpedanz $\underline{Z}_E(\omega) = \dfrac{\underline{U}_E(\omega)}{\underline{I}_E(\omega)}$ der in Bild 1 dargestellten Schaltung. R, L, G, C seien bekannt.

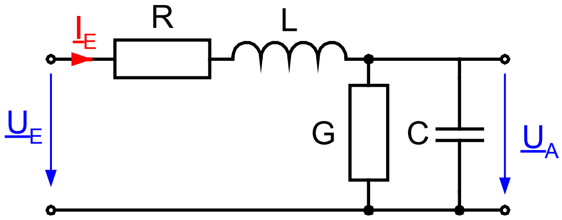

Bild 1: Schaltung zu Aufgabe 4 und Aufgabe 6

5) Gegeben ist die Funktion $\underline{u}(t) = \hat{U}\, e^{(\sigma + j\omega)t}$ mit festen Werten $\hat{U} > 0$, $\underline{\sigma < 0}$ und $\omega > 0$.
Skizzieren Sie für $t \geq 0$
a) $\mathrm{Re}(\underline{u}(t))$ b) $\mathrm{Im}(\underline{u}(t))$ c) $|\underline{u}(t)|$ d) $\arg(\underline{u}(t))$ e) $\underline{u}(t)$

6) a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $\underline{F}(p) = \dfrac{\underline{U}_A(p)}{\underline{U}_E(p)}$ der Schaltung in Bild 1.
b) Berechnen Sie den Amplitudengang $F(\omega)$ zu a).
c) Berechnen Sie den Phasengang $\varphi(\omega)$ zu a).

7) a) Durch welche Art von Zeitfunktion wird das Verhalten eines verlustbehafteten, linearen Systems, das mehrere unabhängige Energiespeicher gleicher Art enthält, nach einer einmaligen Anregung beschrieben?
b) Durch welchen Typ von Differentialgleichungen wird das Verhalten linearer, zeitinvarianter Systeme mit konzentrierten Parametern ohne äußere Anregung beschrieben?
c) Die spezielle Lösung einer Differentialgleichung, die das Verhalten eines Systems nach einem Einschaltvorgang beschreibt, besteht im allgemeinen aus zwei Teilen. Welche physikalisch/anschauliche Bedeutung haben diese beiden Teile?
d) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung
$$\ddot{y}(t) + 4\omega_0\, \dot{y}(t) + 13\omega_0^2\, y(t) = 4\cos(\omega_0\, t)$$
für festes, bekanntes $\omega_0 > 0$.

8) Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie, sofern sie existieren, die Matrizen
a) $C = AB$
b) $D = B^T A^{-1}$.

9) Eine Rolle mit 10.000 SMD-Widerständen enthält im Mittel 0,1% defekte Widerstände.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den ersten 10 Widerständen auf der Rolle genau einer defekt ist?

Die Widerstände werden in Platinen eingebaut; pro Platine 100 Widerstände. Enthält eine Platine mindestens einen defekten Widerstand, so ist sie defekt.

b) Wieviel % der Platinen werden im Mittel defekt sein?

Aus den Platinen werden Systeme gebaut; pro System 20 Platinen. Enthält ein System mindestens eine defekten Platine, so ist es defekt.

c) Wieviel % der Systeme werden im Mittel defekt sein?

10) Gegeben ist die Funktion $P_a = f(U_q, R_i, R_a, X_a) = \dfrac{U_q^2\, R_a}{(R_i + R_a)^2 + X_a^2}$ mit U_q, R_i, $X_a > 0$.

Für welche Werte $R_a = g(U_q, R_i, X_a)$ mit $R_a \geq 0$ nimmt P_a Extremwerte an?

11) Ein zylinderförmiges Gebiet mit dem Radius r_a und der Höhe h enthält eine ortsabhängige Raumladungsdichte $\rho = \dfrac{dQ}{dV}$ mit $\rho(r) = (r - r_a)^2 \cdot \dfrac{\rho_0}{r_a^2}$, wobei ρ_0 eine konstante Größe ist.

Berechnen Sie die Gesamtladung $Q = \int\limits_{(V)} \rho\, dV$ innerhalb des Gebietes.

Separierbare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Form: $\boxed{y' = f(x)\cdot g(y)}$

Lösung wegen $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ durch „**Trennung der Variablen**": $\boxed{\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx}$

Durch Substitution lösbare Differentialgleichungen

Betrachtete Form: $\boxed{y' = f(ax+by+c)}$ mit $b \neq 0$
Lösungsweg: **Substitution** $u = ax+by+c$, also $y' = f(u)$.
$u' = \frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} = 1\cdot(a + b\cdot f(u))$.
Trennung der Variablen ergibt Lösung u(x) dieser DGL. **Rücksubstitution** führt zu y(x).

Lineare Differentialgleichungen

Die allgemeine Lösung $y(x)$ einer inhomogenen, linearen Differentialgleichung besteht aus

1. der allgemeinen Lösung $y_h(x)$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung
2. irgendeiner partikulären Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung:

$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x)}$

Homogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Form: $\boxed{y' + f(x)\cdot y = 0}$:
Allgemeine Lösung: $\boxed{y(x) = C\cdot e^{-F(x)}}$ mit einer Stammfunktion $\boxed{F(x) = \int f(x)\,dx}$ und $C \in R$.

Inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

Form: $\boxed{y' + f(x)\cdot y = g(x)}$:
Lösung mittels „**Variation der Konstanten**", sofern $y_p(x)$ nicht einfacher zu ermitteln ist:
$\boxed{y(x) = c(x)\cdot e^{-F(x)}}$ mit $\boxed{c(x) = \int g(x)\cdot e^{+F(x)}dx}$ mit einer Stammfunktion $\boxed{F(x) = \int f(x)\,dx}$.

Inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Form: $\boxed{y' + a_o y = g(x)}$ mit $a_0 = \text{const.}$
Lösung über $\boxed{y_h(x) = C\cdot e^{-a_o x}}$ und einen Ansatz für $y_p(x)$ aus folgender Tabelle:

g(x)	Fall	Ansatz für $y_p(x)$
$b_o + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$		$c_o + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n$
$b\cdot e^{\alpha x}$	$\alpha \neq -a_o$	$c\cdot e^{\alpha x}$
	$\alpha = -a_o$	$c\cdot x\cdot e^{\alpha x}$
$b_1\cdot\sin(\beta x) + b_2\cdot\cos(\beta x)$		$c_1\cdot\sin(\beta x) + c_2\cdot\cos(\beta x)$

Inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Form: $\boxed{y'' + a_1y' + a_oy = g(x)}$ mit a_1, a_0 = const.

1. Berechnung von $y_h(x)$

Ansatz $y = e^{\lambda x}$ mit $\boxed{\underline{\lambda} = \sigma + j\omega}$ führt auf die **charakteristische Gleichung**
$\boxed{\underline{\lambda}^2 + a_1\underline{\lambda} + a_o = 0}$

mit den **Lösungen** $\boxed{\underline{\lambda}_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_o}}$.

Damit Entscheidung für einen Typ von **Ansatzfunktion**, deren konkrete Parameter $(\lambda, \sigma, \omega)$ sich aus den Lösungen der charakteristischen Gleichung ergeben.
C_1, C_2 sind Integrationskonstante.

Fall	Nullstellen	Ansatzfunktion für $y_h(x)$
$\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_o > 0$	zwei reelle λ_1, λ_2	$y_h(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$
$\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_o = 0$	eine doppelte reelle $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$y_h(x) = (C_1 + C_2x)e^{\lambda x}$
$\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_o < 0$	zwei konjugiert komplexe $\underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2 = \sigma \pm j\omega$	$y_h(x) = e^{\sigma x}[C_1\cos(\omega x) + C_2\sin(\omega x)]$ mit $\sigma = -a_1/2$ und $\omega = \sqrt{-(a_1/2)^2 + a_0} > 0$

2. Berechnung von $y_p(x)$

Der Typ der Ansatzfunktion ist identisch mit dem Typ der Störfunktion g(x).

g(x)	Fall	Ansatzfunktion für $y_p(x)$
$b_o + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$	$a_o \neq 0$	$c_o + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n$
	$a_o = 0,\quad a_1 \neq 0$	$x\cdot(c_o + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n)$
	$a_o = 0,\quad a_1 = 0$	$x^2\cdot(c_o + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n)$
$b\cdot e^{\alpha x}$	$\alpha \notin \{\lambda_1, \lambda_2\}$	$c\cdot e^{\alpha x}$
	$\alpha \in \{\lambda_1, \lambda_2\}, \lambda_1 \neq \lambda_2$	$c\cdot x\cdot e^{\alpha x}$
	$\alpha = \lambda_1 = \lambda_2$	$c\cdot x^2\cdot e^{\alpha x}$
$b_1\cdot\sin(\beta x) + b_2\cdot\cos(\beta x)$	$j\beta \notin \{\underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2\}$	$c_1\cdot\sin(\beta x) + c_2\cdot\cos(\beta x)$
	$j\beta \in \{\underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2\}$	$x\cdot(c_1\cdot\sin(\beta x) + c_2\cdot\cos(\beta x))$

Ist g(x) eine Summe/ein Produkt in der Tabelle enthaltener Funktionen, so ist als Ansatzfunktion ebenfalls eine Summe/ein Produkt solcher Funktionen anzusetzen.
Alle in der Ansatzfunktion enthaltenen unbekannten Koeffizienten c_i müssen sich durch Einsetzen der Ansatzfunktion in die inhomogene Differentialgleichung und Koeffizientenvergleich bestimmen lassen. Anderenfalls ist die Rechnung fehlerhaft.