Zeigerdarstellung von Sinusgrößen

Version 1
21.3.2004

Setzt man in der **Eulerschen Formel** $\boxed{e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi}$
statt des allgemeinen Argumentes φ speziell den Ausdruck $\omega t + \varphi_{0a}$ mit konstantem $\omega > 0$ und konstantem φ_{0a} ein und multipliziert beide Seiten mit der **positiven reellen Konstanten** $\hat{A}$, so erhält man die **komplexwertige Zeitfunktion**

$$\boxed{\underline{a}(t) = \hat{A}\, e^{j(\omega t + \varphi_{0a})} = \hat{A}\cos(\omega t + \varphi_{0a}) + j\,\hat{A}\sin(\omega t + \varphi_{0a})}. \qquad (1)$$

Eine Größe der Form (1) ist anschaulich vorstellbar als **Zeiger** der **konstanten Länge** $\hat{A}$, der mit der **Winkelgeschwindigkeit** ω im **mathematisch positiven Sinn** um den Ursprung der Gaußschen Zahlenebene **rotiert** und bei $t = 0$ das Argument φ_{0a} hat. Offensichtlich beschreiben sowohl Real- als auch Imaginärteil von (1) **harmonische Schwingungen** mit der Amplitude $\hat{A}$ und der Kreisfrequenz ω.

In der Elektrotechnik verwendet man zur Beschreibung harmonischer Schwingungen die **Sinusfunktion** und spricht von „**Sinusgrößen**", z.B. „Sinusspannungen" und „Sinusströmen". Damit kann man eine allgemeine reelle Sinusgröße a(t) mittels (1) beschreiben in der Form

$$\boxed{a(t) = \hat{A}\sin(\omega t + \varphi_{0a}) = \mathrm{Im}\left(\hat{A}\, e^{j(\omega t + \varphi_{0a})}\right) = \mathrm{Im}\left(\underline{a}(t)\right)} \qquad (2)$$

<u>Mit dieser Konvention wird eine Sinusgröße durch einen **rotierenden Zeiger** (1) beschrieben.</u>

Haben in einem System **alle Sinusgrößen die selbe, bekannte Frequenz** (bzw. Kreisfrequenz), so lässt sich jede dieser Sinusgrößen durch <u>**zwei**</u> **weitere Parameter** beschreiben:

1. **Amplitude**, auch **Scheitelwert** genannt (hier $\hat{A}$) <u>oder</u> **Effektivwert** (hier $A = \hat{A}/\sqrt{2}$)
2. **Nullphasenwinkel** (hier φ_{0a}) <u>oder</u> **Nullzeit** (hier φ_{0a}/ω)

Die (Phasen-)Lage <u>**gleichfrequenter**</u> Sinusgrößen **relativ zueinander** über der t- bzw. ω-Achse ändert sich nicht. Die rotierenden Zeiger, deren **Imaginärteile** diese Schwingungen beschreiben, ändern ihre Lage **relativ zueinander** ebenfalls nicht.
In der Sinusstromtechnik interessiert die **absolute** Lage der betrachteten gleichfrequenten Sinusgrößen über der t- bzw. ω-Achse in der Regel nicht, sondern nur ihre **relative** Lage zueinander (ausgedrückt durch ihre <u>**konstanten**</u> **Phasenverschiebungen** gegenüber einer <u>**gemeinsamen**</u> **Bezugsschwingung**) sowie ihre <u>**konstanten Amplituden**</u>. Formal betrachtet reicht es daher aus, die Zeiger, zu einem beliebigen festen Zeitpunkt t zu betrachten. Oft wird der Zeitpunkt $t = 0$ gewählt. Damit folgt aus (1) $\boxed{\underline{A} = \underline{a}(0) = \hat{A}\, e^{j\varphi_{0a}}}$. (3)

<u>Mit dieser Konvention wird eine Sinusgröße durch einen **ruhenden Zeiger** beschrieben.</u>

Rotierende Zeiger wie in (1) werden oft mit **kleinen Buchstaben** bezeichnet, ruhende Zeigergrößen wie in (3) meist mit **großen Buchstaben**.

Speziell in der Elektrotechnik ist es wegen der dann einfacheren Leistungsberechnung zweckmäßig, Sinusströme und Sinusspannungen nicht mittels ihrer **Amplituden**, sondern ihrer **Effektivwerte** zu beschreiben. An Stelle der **Scheitelwertzeiger** in der Form (1) bzw. (3) verwendet man daher **rotierende Effektivwertzeiger** der Form $\boxed{\underline{a}(t) = A\, e^{j(\omega t + \varphi_{0a})}}$ (4)

bzw. (üblichste Form) <u>**ruhende Effektivwertzeiger**</u> der Form $\boxed{\underline{A} = A\, e^{j\varphi_{0a}}}$. (5)

Aus der Darstellung (5) erhält man die Zeitfunktion durch die Rücktransformationsvorschrift

$$\boxed{a(t) = \mathrm{Im}\left(\sqrt{2}\,\underline{A}\, e^{j\omega t}\right) = \mathrm{Im}\left(\sqrt{2}\, A\, e^{j\varphi_{0a}}\, e^{j\omega t}\right) = \mathrm{Im}\left(\hat{A}\, e^{j(\omega t + \varphi_{0a})}\right) = \hat{A}\sin(\omega t + \varphi_{0a})}.$$

<u>**Wichtiger Hinweis:**</u> In der Sinusstromtechnik gibt es neben den **Sinusgrößen** (Sinusspannungen, Sinusströme), die meist <u>**vereinfacht**</u> durch **ruhende** Effektivwertzeiger beschrieben werden, auch **zeitinvariante Größen** (Impedanzen, Admittanzen, komplexe Leistungen), die durch <u>**tatsächlich**</u> **ruhende Zeiger** beschrieben werden.