Version 2
26.4.2004

Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

Eine Matrix wird mit einem Skalar (d.h. einer Zahl) multipliziert, indem man jedes Element der Matrix mit der Zahl multipliziert.
Beispiel: $\lambda \cdot A = A \cdot \lambda = \lambda \cdot (a_{ij}) = (\lambda \cdot a_{ij})$ mit dem Skalar λ und der Matrix A.

Insbesondere gilt $\boxed{-1 \cdot A = -A = (-a_{ij})}$

Addition und Subtraktion zweier Matrizen

Die Matrixaddition ist nur für gleichartige Matrizen definiert.
Dann gilt: zwei Matrizen werden addiert, indem man einander entsprechende Elemente addiert: $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$
Es gilt $A - B = A + (-B)$
Hinweis: Jede quadratische Matrix A ist darstellbar als Summe aus einer symmetrischen Matrix A_a und einer schiefsymmetrische Matrix A_b mit

$$\boxed{A_a = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right)} \text{ und } \boxed{A_b = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)}$$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 4 & 9 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Multiplikation zweier Matrizen

Das Produkt $A \cdot B$ zweier Matrizen A und B ist nur definiert, wenn die Anzahl der Spalten von A gleich der Zahl der Zeilen von B ist.
Sei A vom Typ (m, ℓ) und B vom Typ (ℓ, n).
Dann ergibt das Matrizenprodukt $A \cdot B = AB = C$ eine Matrix $C = (c_{ij})$ vom Typ (m, n).
Die einzelnen Elemente c_{ij} von C ergeben sich aus dem Skalarprodukt der i-ten Zeile von A mit der j-ten Spalte von B: $\boxed{c_{ij} = \sum_{\mu=1}^{\ell} a_{i\mu} \cdot b_{\mu j}}$

Um ein Matrixprodukt $AB = C$ übersichtlich berechnen zu können, empfiehlt sich folgende Schreibweise der beteiligten Matrizen:

$$
\begin{array}{cccc|ccc|l}
 & & & & b_{11} & \cdots & b_{1n} & \\
 & & & & \cdots & \cdots & \cdots & = B \\
 & & & & b_{\ell 1} & \cdots & b_{\ell n} & \\
\hline
 & a_{11} & \cdots & a_{1\ell} & c_{11} & \cdots & c_{1n} & \\
A = & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & = C \\
 & a_{m1} & \cdots & a_{m\ell} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} &
\end{array}
$$

Hinweise:
1. Es gilt $E_1 \cdot A = A \cdot E_2 = A$, wobei E_1 und E_2 i.a. unterschiedliche Einheitsmatrizen sind.
2. AB kann eine Nullmatrix ergeben, obwohl weder A noch B Nullmatrizen sind.
3. Für AA schreibt man auch A^2 und entsprechend $A^n = A^{n-1}A$

Rechengesetze für Matrizenoperationen

A, B, C seien Matrizen und λ ein Skalar.
Im folgenden wird vorausgesetzt, dass die verwendeten Operationen definiert sind!

$\boxed{A + B = B + A}$

Achtung: i.a. gilt aber $\boxed{A \cdot B \neq B \cdot A}$

$\boxed{A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C}$

$\boxed{\lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B)}$

$\boxed{A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot B \cdot C}$

$\boxed{\lambda \cdot (B + C) = (\lambda \cdot B) + (\lambda \cdot C)}$

$\boxed{(A + B) \cdot \lambda = (A \cdot \lambda) + (B \cdot \lambda)}$

$\boxed{A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)}$

$\boxed{(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)}$

Achtung: i.a. gilt aber $\boxed{A \cdot (B + C) \neq (B + C) \cdot A}$

$\boxed{(A + B)^T = A^T + B^T}$

Achtung: $\boxed{(AB)^T = B^T A^T}$

Inverse einer Matrix

Es seien A und B gleichartige quadratische Matrizen. Gilt AB = E, so nennt man B die inverse Matrix zu A und schreibt $B = A^{-1}$.
Existiert zu einer Matrix A die inverse Matrix A^{-1}, so heißt A **regulär**, anderenfalls **singulär**.
Eine Matrix A ist genau dann regulär, wenn ihre Zeilenvektoren linear unabhängig voneinander sind.
Berechnung der inversen Matrix mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren

1. Rechts neben die zu invertierende quadratische Matrix wird eine Einheitsmatrix des selben Typs geschrieben.

   $$\text{Beispiel: } A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = E$$

2. Die zu invertierende Matrix wird zusammen mit der Einheitsmatrix mittels der Regeln des Gaußschen Algorithmus in eine Einheitsmatrix umgeformt.
3. Ist 2. erfolgreich, so steht rechts neben der Einheitsmatrix die gesuchte inverse Matrix. Führt das Verfahren auf einen Widerspruch, so ist die zu invertierende Matrix singulär.

   $$\text{Beispiel: } E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right) = B = A^{-1}$$

Rechengesetze für inverse Matrizen:

Sei A eine reguläre Matrix und $\lambda \neq 0$ ein Skalar

$\boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$

Achtung: $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}}$

$\boxed{(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}}$