Allgemeine Begriffe

Eine (m, n)-Matrix, auch $(m \times n)$-Matrix, ist ein rechteckiges Schema von Zahlen (oder Funktionen), den $m \cdot n$ **Elementen der Matrix**, die in m Zeilen und n Spalten (mit $m, n \in \mathbb{N}$) angeordnet sind. Das Schema setzt man in runde Klammern. Matrizen werden meist mit großen lateinischen Buchstaben (manchmal mit Unterstrich) bezeichnet, z.B. A oder $\underline{A}$.
Die einzelnen Elemente einer Matrix werden mit dem zugehörigen kleinen Buchstaben mit angehängtem Zeilen- und Spaltenindex bezeichnet, z.B. a_{ij}.
Der erste Index ist der **Zeilenindex**, der zweite der **Spaltenindex**.
Man schreibt auch $A = (a_{ij})$. a_{ij} ist also das Element in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte.

Beispiel: $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Man sagt auch, eine (m, n)-Matrix sei vom **Typ** (m, n).

Zwei Matrizen heißen **gleichartig**, wenn sie vom gleichen Typ sind.

Zwei Matrizen A und B sind **gleich** (A = B), wenn sie gleichartig sind und $a_{ij} = b_{ij} \ \forall\, i, j$ gilt.

Matrizen vom Typ (1, n) heißen **Zeilenvektor**, Matrizen vom Typ (m, 1) **Spaltenvektor**.
Bei Zeilenvektoren trennt man die Elemente manchmal durch Kommas voneinander.
Beispiel:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & -2 \end{pmatrix} = (1, 4, 7, -2)$ ist ein Zeilenvektor, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist ein Spaltenvektor

Matrizen vom Typ (m, n) kann man als Anordnung von m Zeilenvektoren bzw. von n Spaltenvektoren auffassen.

Matrizen vom Typ (m, m) heißen **quadratische Matrizen**, alle anderen rechteckige Matrizen.

Eine Matrix beliebigen Typs heißt **Nullmatrix**, wenn alle ihre Elemente Null sind. Nullmatrizen werden mit „0“ bezeichnet.
Sofern sich der **Typ einen Nullmatrix** nicht aus dem Zusammenhang ergibt, so ist er anzugeben.

Beispiel: $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist eine Nullmatrix vom Typ (3, 2)

Vertauscht man bei einer Matrix A vom Typ (m, n) Zeilen und Spalten, so entsteht die **transponierte Matrix** A^T vom Typ (n, m). Es gilt $(a_{ij})^T = (a_{ji})$ sowie $(A^T)^T = A$.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Begriffe bei quadratische Matrizen

Die **Hauptdiagonale** einer quadratischen Matrix besteht aus allen Elementen, deren Zeilenindex gleich dem Spaltenindex ist. Bei einer Matrix A also aus a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{mm}
Die Hauptdiagonale verläuft „von links oben nach rechts unten".

Eine quadratische Matrix, bei der alle außerhalb der Hauptdiagonalen liegenden Elemente gleich Null sind, heißt **Diagonalmatrix**. (Hauptdiagonalelemente dürfen auch Null sein.)

Eine Diagonalmatrix, deren Hauptdiagonalelemente alle Eins sind, heißt **Einheitsmatrix**. Einheitsmatrizen werden mit „E" bezeichnet.
Sofern sich der **Typ einen Einheitsmatrix** nicht aus dem Zusammenhang ergibt, ist er anzugeben.

Beispiel: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist eine Einheitsmatrix vom Typ (3, 3)

Eine quadratische Matrix, bei der alle <u>unterhalb</u> der Hauptdiagonalen liegenden Elemente gleich <u>Null</u> sind, heißt **obere Dreiecksmatrix**. Solche Matrizen werden häufig mit „R" (von „right") oder mit „U" (von „upper") bezeichnet.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Eine quadratische Matrix, bei der alle <u>oberhalb</u> der Hauptdiagonalen liegenden Elemente gleich <u>Null</u> sind, heißt **untere Dreiecksmatrix**. Solche Matrizen werden häufig mit „L" (von „left" oder „lower") bezeichnet.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Eine quadratische Matrix A, bei der $A^T = A$, also $a_{ij} = a_{ji}$ gilt, heißt **symmetrische Matrix**.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 7 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

Eine quadratische Matrix A, bei der $A^T = - A$, also $a_{ij} = - a_{ji}$ gilt, heißt **schiefsymmetrische Matrix**. Bei einer schiefsymmetrischen Matrix sind alle Elemente a_{ii} auf der Hauptdiagonalen Null.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 7 \\ 4 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

Anmerkung: Es gibt noch wesentlich mehr Begriffe im Zusammenhang mit Matrizen, die für uns jedoch nicht wichtig sind und daher nicht behandelt werden.