Version 3
25.3.2004

Für komplexe Zahlen gelten prinzipiell die gleichen Rechenregeln wie für reelle Zahlen. Man muss lediglich beachten, dass eine komplexe Zahl die Summe aus einer reellen und einer imaginären Zahl ist und dass $\boxed{j^2 = -1}$ gilt.

Nachfolgend sei $\boxed{\underline{z} = a + jb = r \cdot e^{j\varphi}}$, $\boxed{\underline{z}_1 = a_1 + jb_1 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1}}$ und $\boxed{\underline{z}_2 = a_2 + jb_2 = r_2 \cdot e^{j\varphi_2}}$.

1 Umrechnung zwischen den Darstellungsformen

Von der Exponentialform in die kartesische Form:
$\boxed{a = r \cdot \cos\varphi}$, $\boxed{b = r \cdot \sin\varphi}$

Von der kartesischen Form in die Exponentialform:

$\boxed{r = \sqrt{a^2 + b^2}}$, $\boxed{\varphi = \arctan\frac{b}{a} = \operatorname{Arc}\tan\left(\frac{b}{a}\right) + n\pi}$ mit $\boxed{n = 0}$ für $\boxed{a > 0}$ (1. und 4. Quadranten).

Bei $a < 0$ gilt $\boxed{n = +1}$ für $\boxed{b > 0}$ (2. Quadrant) und $\boxed{n = -1}$ für $\boxed{b < 0}$ (3. Quadrant)[1].

2 Real- und Imaginärteil

Am einfachsten in der kartesischen Form berechenbar.

$\boxed{\mathrm{Re}(\underline{z}) = a = r \cdot \mathrm{Re}(e^{j\varphi}) = r \cdot \cos\varphi}$, $\boxed{\mathrm{Im}(\underline{z}) = b = r \cdot \mathrm{Im}(e^{j\varphi}) = r \cdot \sin\varphi}$

Es gilt $\boxed{\mathrm{Re}(\underline{z}_1 \pm \underline{z}_2) = \mathrm{Re}(\underline{z}_1) \pm \mathrm{Re}(\underline{z}_2)}$, $\boxed{\mathrm{Im}(\underline{z}_1 \pm \underline{z}_2) = \mathrm{Im}(\underline{z}_1) \pm \mathrm{Im}(\underline{z}_2)}$.

Aber: $\boxed{\mathrm{Re}(\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2) \neq \mathrm{Re}(\underline{z}_1) \cdot \mathrm{Re}(\underline{z}_2)}$, $\boxed{\mathrm{Im}(\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2) \neq \mathrm{Im}(\underline{z}_1) \cdot \mathrm{Im}(\underline{z}_2)}$

$\boxed{\mathrm{Re}\left(\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right) \neq \frac{\mathrm{Re}(\underline{z}_1)}{\mathrm{Re}(\underline{z}_2)}}$, $\boxed{\mathrm{Im}\left(\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right) \neq \frac{\mathrm{Im}(\underline{z}_1)}{\mathrm{Im}(\underline{z}_2)}}$

3 Addition, Subtraktion

Am einfachsten in der kartesischen Form durchführbar.

$\boxed{\underline{z}_1 \pm \underline{z}_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)}$ und speziell $\boxed{-\underline{z}_2 = -a_2 - jb_2}$.

4 Multiplikation

Am einfachsten in der Eulerschen Form durchführbar.

$\boxed{\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = r_1 r_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}}$ beziehungsweise $\boxed{\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_2 b_1 + a_1 b_2)}$.

5 Division

Am einfachsten in der Eulerschen Form durchführbar.

$\boxed{\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}}$ beziehungsweise $\boxed{\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2^*}{\underline{z}_2 \cdot \underline{z}_2^*} = \frac{\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2^*}{|\underline{z}_2|^2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + j(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}}$

und speziell $\boxed{\frac{1}{\underline{z}} = \frac{1}{r \cdot e^{j\varphi}} = \frac{1}{r} \cdot e^{-j\varphi}}$.

[1] Der Korrekturterm $n\pi$ hat also das selbe Vorzeichen wie der Imaginärteil der komplexen Zahl.

Änderungen in Version 3: Schreibfehler in Dreiecksungleichung korrigiert, Abschnitte 1 und 8 ergänzt, Form völlig überarbeitet.
Bitte benachrichtigen Sie mich, wenn Sie in diesem Dokument Fehler finden oder Anregungen oder Fragen dazu haben.

6 Konjugiert komplexe Zahl

Die konjugiert komplexe Zahl ergibt sich durch Spiegelung des zugehörigen Punktes an der reellen Achse der Gaußschen Zahlenebene.

Es gilt $\boxed{\underline{z}^* = a - jb = r \cdot e^{-j\varphi}}$ und speziell $\boxed{\underline{z} \cdot \underline{z}^* = a^2 + b^2 = z^2}$.

Außerdem gilt $\boxed{(\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2)^* = r_1 r_2 \cdot e^{-j(\varphi_1+\varphi_2)} = (\underline{z}_1)^* \cdot (\underline{z}_2)^*}$ sowie $\boxed{\left(\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right)^* = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{-j(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{(\underline{z}_1)^*}{(\underline{z}_2)^*}}$

und $\boxed{|\underline{z}| = |\underline{z}^*|}$.

7 Betrag

Der Betrag einer komplexen Zahl ist gleich dem Abstand des zugehörigen Punktes vom Ursprung der Gaußschen Zahlenebene. In der Exponentialform direkt ablesbar.

$\boxed{|\underline{z}| = z = r = \sqrt{(\mathrm{Re}(\underline{z}))^2 + (\mathrm{Im}(\underline{z}))^2} = \sqrt{a^2 + b^2}}$.

Es gilt $\boxed{|\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2| = \left|r_1 r_2 \cdot e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}\right| = |\underline{z}_1| \cdot |\underline{z}_2|}$

und $\boxed{\left|\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right| = \left|\frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|}}$.

Aber $\boxed{|\underline{z}_1 \pm \underline{z}_2| \not\equiv |\underline{z}_1| \pm |\underline{z}_2|}$, sondern speziell $\boxed{|\underline{z}_1 + \underline{z}_2| \le |\underline{z}_1| + |\underline{z}_2|}$ (Dreiecksungleichung)

8 Argument (Phase)

Das Argument einer komplexen Zahl ist gleich dem vorzeichenbehafteten Winkel von der reellen Achse zum Zeiger, der die Zahl in der Gaußschen Zahlenebene bezeichnet. In der Exponentialform direkt ablesbar.

$\boxed{\arg(\underline{z}) = \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)}$ Quadrantenproblematik (siehe Abschnitt 1) beachten!

Es gilt $\boxed{\arg(\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2) = \arg(r_1 r_2 \cdot e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}) = \varphi_1 + \varphi_2 = \arg(\underline{z}_1) + \arg(\underline{z}_2)}$

und $\boxed{\arg\left(\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right) = \arg\left(\frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}\right) = \varphi_1 - \varphi_2 = \arg(\underline{z}_1) - \arg(\underline{z}_2)}$.

Änderungen in Version 3: Schreibfehler in Dreiecksungleichung korrigiert, Abschnitte 1 und 8 ergänzt, Form völlig überarbeitet.
Bitte benachrichtigen Sie mich, wenn Sie in diesem Dokument Fehler finden oder Anregungen oder Fragen dazu haben.