Oft werden Messergebnisse durch **Verknüpfung von mehreren Messgrößen** ermittelt, z.B. eine Leistung aus den Messwerten von Strom und Widerstand: $P = I^2 \cdot R$. Dabei ergibt sich die Frage, wie sich die (unvermeidbaren) Fehler der einzelnen Messgrößen auf den Fehler des daraus berechneten Messergebnisses y auswirken. Die Antwort liefert die **Analyse der Fehlerfortpflanzung**.

Der Zusammenhang $y = f(x_1, x_2, x_3, ...)$ sei bekannt, für die einzelnen Messgrößen x_i seien die Mittelwerte $\overline{x_i}$ bekannt. Dann wird die Abweichung Δy von y bei Veränderung von x_1 um Δx_1, x_2 um Δx_2 usw. für $\Delta x_i << \overline{x_i}$ beschrieben durch das **totale Differential**

$$\boxed{\Delta y = \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_i=\overline{x_i}} \cdot \Delta x_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x_i=\overline{x_i}} \cdot \Delta x_2 + \left.\frac{\partial f}{\partial x_3}\right|_{x_i=\overline{x_i}} \cdot \Delta x_3 + ...}. \qquad (1)$$

Für die x_i sind die jeweiligen Mittelwerte einzusetzen. Die Beziehung (1) gilt nur für kleine Δx_i. Sie ist nur einsetzbar, wenn die einzelnen Δx_i nach Betrag und Vorzeichen bekannt sind. Geht man davon aus, dass die Δx_i zufällige Fehler sind, dann ist (1) mangels Kenntnis der Werte der einzelnen Δx_i nicht anwendbar.

Durch Bildung der Beträge der Abweichungen in (1) erhält man einen Zusammenhang für den **Betrag des maximalen Fehlers** („**Größtfehlers**") des Ergebnisses:

$$\boxed{|\Delta y_{max}| = \left|\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_i=\overline{x_i}} \cdot \Delta x_1\right| + \left|\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x_i=\overline{x_i}} \cdot \Delta x_2\right| + \left|\left.\frac{\partial f}{\partial x_3}\right|_{x_i=\overline{x_i}} \cdot \Delta x_3\right| + ...}. \qquad (2)$$

(1) und (2) sind pessimistische Abschätzungen, da vom gleichzeitigen Auftreten aller Δx_i ausgegangen wird. Bei (2) wird davon ausgegangen, dass alle Fehler das Ergebnis „zur selben Seite hin" verfälschen. Handelt es sich bei den Δx_i um voneinander unabhängige, normalverteilte Fehler, so wird ihre Wirkung, der sogenannte **mittlere absolute Fehler**, besser beschrieben durch das **Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz**

$$\boxed{|\Delta y_m| = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_i=\overline{x_i}} \cdot \Delta x_1\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x_i=\overline{x_i}} \cdot \Delta x_2\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_3}\right|_{x_i=\overline{x_i}} \cdot \Delta x_3\right)^2 + ...}} \qquad (3)$$

Anwendung des Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes

Untersucht werden Beispiele der Form y = f(a, b).

Aus (3) folgt dann allgemein $|\Delta y_m| = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial y}{\partial a}\right|_{a=\overline{a},b=\overline{b}} \cdot \Delta a\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial y}{\partial b}\right|_{a=\overline{a},b=\overline{b}} \cdot \Delta b\right)^2}$. (4)

Für die Zahlenwert gelte $a = \overline{a} \pm \Delta a = (100 \pm 4)$ mV, also 4 % relativer Fehler, $b = (90 \pm 3)$ mV, also 3,33 % relativer Fehler.

1.) Sei $\boxed{y = a + b}$

Daraus folgt $\overline{y} = \overline{a} + \overline{b}$ und mit (2) $\boxed{|\Delta y_{max}| = |\Delta a| + |\Delta b|}$ (5)

und mit (4) $\boxed{|\Delta y_m| = \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2}}$. (6)

Zahlenwerte: $|\Delta y_{max}| = 7$ mV, $|\Delta y_m| = 5$ mV, also $y = (190 \pm 5)$ mV, also ca. 2,63% mitt-

lerer relativer Fehler.
<u>Allgemein gilt</u>: Wird die <u>Summe fehlerbehafteter Größen</u> gebildet, so ist der maximale absolute Fehler gleich der Summe der einzelnen absoluten Fehler, der mittlere absolute Fehler ergibt sich aus der geometrischen Addition der einzelnen absoluten Fehler, <u>der mittlere relative Fehler kann zurückgehen.</u>

2.) Sei $\boxed{y = a - b}$
Daraus folgt wie bei a) wegen der Betragsbildung bzw. des Quadrierens
$\boxed{|\Delta y_{max}| = |\Delta a| + |\Delta b|}$ und $\boxed{|\Delta y_m| = \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2}}$.
Zahlenwerte: $|\Delta y_{max}| = 7\ \text{mV}$ und $|\Delta y_m| = 5\ \text{mV}$, also $y = (10 \pm 5)\ \text{mV}$, d.h. 50% mittlerer relativer Fehler!
<u>Allgemein gilt</u>: Wird die <u>Differenz ähnlich großer fehlerbehafteter Größen</u> gebildet, so ist der maximale absolute Fehler gleich der Summe der einzelnen absoluten Fehler, der mittlere absolute Fehler ergibt sich aus der geometrischen Addition der einzelnen absoluten Fehler, <u>der mittlere relative Fehler steigt jedoch erheblich an!</u>

3.) Sei $\boxed{y = a \cdot b}$

Daraus folgt mit (2) $|\Delta y_{max}| = |\bar{b} \cdot \Delta a| + |\bar{a} \cdot \Delta b|$ und mit (4) $|\Delta y_m| = \sqrt{(\bar{b} \cdot \Delta a)^2 + (\bar{a} \cdot \Delta b)^2}$ (7)
Zahlenwerte: $|\Delta y_{max}| = 660\ (\text{mV})^2$ und $|\Delta y_m| = 469\ (\text{mV})^2$, also $y = (9000 \pm 469)\ (\text{mV})^2$, d.h. ca. 7,3% maximaler und ca. 5% mittlerer relativer Fehler.
Dividiert man (7) durch $|\bar{y}| = |\bar{a} \cdot \bar{b}|$, so folgt <u>allgemeingültig</u> $\boxed{\left|\frac{\Delta y_m}{\bar{y}}\right| = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{\bar{a}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{\bar{b}}\right)^2}}$.

<u>Allgemein gilt</u>: Wird das <u>Produkt</u> fehlerbehafteter Größen gebildet, so ergibt sich der resultierende mittlere relative Fehler aus der geometrische Addition (Wurzel der Summe der Quadrate) der relativen Fehler der Einzelgrößen.

4.) Sei $\boxed{y = a^m \cdot b^n}$
Daraus folgt mit (2) $|\Delta y_{max}| = \left|\bar{a}^{m-1} \cdot m \cdot \bar{b}^n \cdot \Delta a\right| + \left|\bar{a}^m \cdot \bar{b}^{n-1} \cdot n \cdot \Delta b\right|$

und mit (4) $|\Delta y_m| = \sqrt{\left(\bar{a}^{m-1} \cdot m \cdot \bar{b}^n \cdot \Delta a\right)^2 + \left(\bar{a}^m \cdot \bar{b}^{n-1} \cdot n \cdot \Delta b\right)^2}$ (8)
Zahlenwerte für m = 2, n = 3: $|\Delta y_{max}| = 1{,}3122 \cdot 10^9\ (\text{mV})^5$ und $|\Delta y_m| = 0{,}9336 \cdot 10^9\ (\text{mV})^5$, also $y = (7{,}29 \pm 0{,}9336) \cdot 10^9\ (\text{mV})^5$, d.h. 18% maximaler und ca. 12% mittlerer relativer Fehler.
Dividiert man (8) durch $|\bar{y}| = |\bar{a} \cdot \bar{b}|$, so folgt <u>allgemeingültig</u>

$$\boxed{\left|\frac{\Delta y_m}{\bar{y}}\right| = \sqrt{\left(m \cdot \frac{\Delta a}{\bar{a}}\right)^2 + \left(n \cdot \frac{\Delta b}{\bar{b}}\right)^2}}$$

<u>Allgemein gilt</u>: Wird das <u>Potenzprodukt</u> fehlerbehafteter Größen gebildet, so ergibt sich der resultierende mittlere relative Fehler aus der Wurzel der Summe der mit den zugehörigen Potenzen gewichteten Quadrate der relativen Fehler der Einzelgrößen (entspricht einer gewichteten geometrischen Addition).