Einführung

Eine Determinante[1] ist ein quadratisches Schema aus Zahlen oder Funktionen, das bei Beachtung der nachfolgenden Rechenregeln als Ergebnis stets eine Zahl ergibt.

Determinanten liefern in der Mathematik eine Aussage über eine prinzipielle Eigenschaft eines Systems bzw. der Gleichungen, die dieses System beschreiben (z.B. stabil/instabil, lösbar/nicht lösbar, linear abhängig/unabhängig) oder sie ermöglichen die Berechnung eines Wertes (z.B. einer Unbekannten in einem linearen Gleichungssystem).

Determinanten sind ausschließlich über und für quadratische Matrizen definiert.

Die Elemente einer Determinante setzt man in senkrechte Striche.

Zweireihige Determinanten (Determinanten zweiter Ordnung)

Es sei $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ eine quadratische (2, 2)-Matrix mit reellen a_{ij}.

Dann heißt $\det A_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ die Determinante von A_2.

(Es gibt auch die Schreibweisen $D = \|A\| = \det(a_{ij})$.)

Es gilt $\boxed{\det A_2 = |A_2| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \in R}$

Dreireihige Determinanten (Determinanten dritter Ordnung)

Es sei $A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ eine quadratische (3, 3)-Matrix mit reellen a_{ij}.

Dann heißt $\det A_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ die Determinante von A_3.

Es gilt $\det A_3 = |A_3| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \in R$

Es sei U_{ij} die (quadratische) Matrix, die durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte der quadratischen Matrix A entsteht.
Dann läßt sich die Berechnung einer dreireihigen Determinante folgendermaßen auf die Berechnung von zweireihigen Unterdeterminanten $|U_{ij}|$ zurückführen:

$$\boxed{\det A_3 = a_{11} \cdot |U_{11}| - a_{12} \cdot |U_{12}| + a_{13} \cdot |U_{13}| = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot |U_{1j}|}$$

Man sagt: „Die Determinante wird nach der ersten Zeile entwickelt“.

[1] Von lateinisch *determinare* = bestimmen

Die Berechnung von dreireihigen Determinanten ist auch sehr einfach möglich mittels der **Regel von Sarrus**:
Man schreibt rechts neben die Determinante nochmals die Elemente in den beiden ersten Spalten.
Dann werden die drei Produkte aus je drei Elementen in Richtung der Hauptdiagonalen addiert und davon die drei Produkte aus je drei Elementen in Richtung der Nebendiagonalen subtrahiert:

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Determinanten höherer als dritter Ordnung
Solche Determinanten muss man, ggf. rekursiv, nach Zeilen oder Spalten „entwickeln“, bis man auf Determinanten 3. Ordnung kommt, die man mit der Regel von Sarrus direkt berechnen kann.

Die Rechenanweisung liefert der **Laplacesche Entwicklungssatz**:
Für n-reihige quadratische Matrizen A gilt:

Entwicklung nach der i-ten Zeile: $\boxed{|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{ij} \cdot |U_{ij}|}$ mit beliebigem, festem $i \in \{1, \ldots, n\}$

Entwicklung nach der j-ten Spalte: $\boxed{|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} \cdot a_{ij} \cdot |U_{ij}|}$ mit beliebigem, festem $j \in \{1, \ldots, n\}$

Hinweise:
1. Man entwickelt zweckmäßigerweise bei einer gegebenen Determinante nach einer Zeile oder Spalte, die möglichst viele Nullen enthält!
2. Der Term $(-1)^{1+i} \cdot |U_{ij}|$ heißt das „algebraische Komplement“ oder die „Adjunkte“ zum Element a_{ij}.
3. Die Vorzeichen der einzelnen Summanden sind innerhalb der zu entwickelnden Determinante schachbrettartig angeordnet, mit einem „+“ links oben beginnend:

$$\begin{matrix} + & - & + & - & \ldots \\ - & + & - & + & \ldots \\ + & - & + & - & \ldots \\ - & + & - & + & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

4. Aus dem Laplaceschen Entwicklungssatz folgt, dass der Wert einer Determinante, bei der irgendeine Zeile oder irgendeine Spalte nur Nullen enthält, Null ist.

Bei der Entwicklung von Determinanten höherer Ordnung erlauben die folgenden **Haupteigenschaften von Determinanten** eine Vereinfachung der Berechnung:
1. Vertauschen zweier Zeilen oder Spalten bewirkt eine Multiplikation des Wertes der Determinante mit –1.
2. Multiplikation aller Elemente einer Zeile oder einer Spalte mit einer Zahl $\lambda \in R$ bewirkt eine Multiplikation des Wertes der Determinante mit λ.
3. Addition des λ-fachen (mit $\lambda \in R$) einer Zeile zu einer anderen Zeile ändert den Wert der Determinante nicht. Entsprechendes gilt für Spalten.

Den dritten Punkt verwendet man, um eine Determinante vor Anwendung des Entwicklungssatzes so umzuformen, dass sie in der Zeile oder Spalte, nach der entwickelt werden soll, möglichst viele Nullen enthält.

Aus den Haupteigenschaften folgt, dass der Wert einer Determinante Null ist, wenn
1. zwei Zeilen oder zwei Spalten gleich sind
2. eine Zeile (Spalte) als Linearkombination anderer Zeilen (Spalten) darstellbar ist

Weitere Rechenregeln für Determinanten
1. Multiplikationssatz: Sind A und B gleichartige quadratische Matrizen, so gilt
   $|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = |B \cdot A|$
   Ein entsprechender Satz für $|A + B|$ existiert nicht!
2. $|\lambda \cdot A| = \lambda^n \cdot |A|$, wenn A eine (n, n)-Matrix und λ ein Skalar ist.
3. $|A^T| = |A|$ (Man darf also Spalten und Reihen miteinander vertauschen.)
4. Ist A eine (obere oder untere) (n, n)-Dreiecksmatrix, so gilt
   $|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$
   Dieser Satz gilt auch für Diagonalmatrizen.

Eindeutigkeitssatz und **Cramersche Regel**
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A \cdot \vec{X} = \vec{B}$ mit der (n, n)-Matrix A und den (n, 1)-Spaltenvektoren $\vec{X}$ und $\vec{B}$.
Δ_i sei die Matrix, die aus A entsteht, wenn man deren i-te Spalte durch den Zielvektor $\vec{B}$ ersetzt.

Eindeutigkeitsssatz:

Das lineare Gleichungssystem $A \cdot \vec{X} = \vec{B}$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn $\|A\| \neq 0$ gilt.

Cramersche Regel: Dann ist $\boxed{x_i = \frac{|\Delta_i|}{|A|}}$ für i = 1, ..., n

Die Cramersche Regel verwendet man nur dann, wenn lediglich einzelne Elemente des Lösungsvektors gesucht sind. Anderenfalls ist das z.B. das Gaußsche Eliminationsverfahren vorzuziehen.

Weitere wichtige Zusammenhänge:

Eine quadratische Matrix ist regulär (d.h. invertierbar) genau dann, wenn die Determinante der Matrix $\neq 0$ ist.

Ein homogenes lineares Gleichungssystem $A \cdot \vec{X} = \vec{B}$ hat genau dann nur die triviale Lösung, wenn $|A| \neq 0$ gilt.

Dann gilt $\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot \vec{X} = A^{-1} \cdot \vec{B}$, also $\boxed{\vec{X} = A^{-1} \cdot \vec{B}}$