



5.1 Rechnen mit Grenzwerten

Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x}{\cos x} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x}{x} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x} \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4x + 4} & & \text{h) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^3 + 5x^2 - 4x - 3}{3x^3 + 11x^2 + 5x - 3} \end{array}$$

5.2 Berechnung der Ableitung von Funktionen mittels Grenzwertprozess

Berechnen Sie – soweit sie existieren - die Ableitungen der folgenden Funktionen durch Grenzwertbildung:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = \frac{a}{x-b} & \text{b) } y = |x| & \text{c) } y = 2x + 1 \\ \text{d) } y = 0,5 \cdot x^2 + x & \text{e) } y = \frac{1}{x^3} & \end{array}$$

5.3 Anwendung der Rechenregeln für die Ableitung

Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen und geben Sie jeweils die Definitionsbereiche von Funktion und erster Ableitung an:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = \left(\frac{x}{2} + 1\right)^5 & \text{b) } y = (1 - 3x^2)^4 & \text{c) } y = x^3 \cdot \sin(2x) \\ \text{d) } y = 3x \cdot \cos^2 \frac{x}{2} & \text{e) } y = \frac{1}{x} \tan 3x & \text{f) } y = e^{-x^2} \\ \text{g) } y = \frac{e^{2x}}{1+x^2} & \text{h) } y = \frac{4x}{(1+x^2)^2} & \text{i) } i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t) \text{ mit festen Werten } \hat{I}, \omega \\ \text{j) } b = f(a) = a^7 - 7^a + 7a - \cos(a) & & \\ \text{k) } y = f(x) = 4x \cdot \tan^2\left(\frac{x}{3}\right) & & \\ \text{l) } z = f(\lambda) = e^{-\lambda^2} & & \end{array}$$

Anspruchsvolle Aufgaben:

Bestimmen Sie y' bei $x \rightarrow \pm 0$ für

$$\begin{array}{lll} \text{m) } y = \sqrt[3]{x} & \text{n) } y = \sin \frac{1}{x} & \text{o) } y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \end{array}$$

5.4 Ableitung komplizierterer Funktionen

Bestimmen Sie – soweit möglich – die erste Ableitung der folgenden Funktionen $f(x)$:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = \text{Arc tan} \frac{1+x}{1-x} & \text{b) } y = \frac{x \cdot \sin x^2}{e^x} \\ \text{c) } y = \text{Arc tan}^2 \frac{1}{x} & \text{d) } y = \frac{x^3 + 2^x}{e^x} \end{array}$$