



Unbestimmte Integrale

Elementare Integrationsregeln und -Verfahren

© 2000-2003 Prof. Dr.-Ing. T. Harriehausen

Seite
1 von 1

Version 4
28.11.2003

1. Faktorregel

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx \quad \text{mit } c = \text{const}$$

2. Summenregel

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

3. Lineartransformation des Argumentes

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$$

4. Produkt aus Ableitung und Potenz einer Funktion

$$\int f'(x) \cdot f^n(x) dx = \frac{1}{n+1} f^{n+1}(x) + C \quad \text{für } n \neq -1$$

5. Logarithmische Integration

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

Elementare Integrationsverfahren

1. Partielle Integration

$$\int u' v dx = uv + C - \int u v' dx \quad \text{bzw.} \quad \int u v' dx = uv + C - \int u' v dx \quad \text{mit } u(x) \text{ und } v(x).$$

Immer dann anwendbar, wenn die eine der beiden Teilfunktionen leicht integrierbar und die andere leicht differenzierbar ist. Bei bestimmten Integralen sind anstelle des Summanden „+ C“ im Ausdruck uv die Integrationsgrenzen einzusetzen!

2. Integration durch Substitution

$$\int f(g(x)) dx = \int f(u) \cdot \frac{1}{g'(x)} du \quad \text{mit } g(x) = u \text{ und } \frac{d}{dx} g(x) = g'(x) = \frac{d}{dx} u, \text{ also } dx = \frac{1}{g'(x)} du$$

Prinzip:

1. **Substitution** (Ersetzung) eines komplizierten Ausdrucks (hier: $f(g(x))$) im Integranden durch eine einfache Funktion (hier: $f(u)$) einer einzuführenden Hilfsvariablen (hier: u) mittels einer **Substitutionsgleichung** (hier: $u = g(x)$).
2. **Substitution** der ursprünglichen Integrationsvariablen (hier: x und dx) überall im Integral durch eine Funktion der Hilfsvariablen (hier also auch: dx durch $\frac{1}{g'(x)} du$).
3. **Integration** über die Hilfsvariable (hier: u).
4. **Rücksubstitution** des Ergebnisses mittels der Substitutionsgleichung (hier: $u = g(x)$).
Bei der Berechnung bestimmter Integrale können statt der Rücksubstitution vor dem Einsetzen der Integrationsgrenzen (z.B. $x = a$ und $x = b$) auch die Integrationsgrenzen mittels der Substitutionsgleichung mit substituiert werden (sie werden zu $a^* = g(a)$ und $b^* = g(b)$).