Version 4
9.2.2004

Grundlage des hier beschriebenen Ansatzes zur Partialbruchzerlegung **echt gebrochen rationaler[1] Funktionen** ist der **Fundamentalsatz der Algebra[2]**:

> Jedes Polynom n-ten Grades mit reellen Koeffizienten hat genau n Nullstellen. Diese sind reell oder paarweise konjugiert komplex.

Konjugiert komplexe Paare von Nullstellen lassen sich durch quadratische Ausdrücke der Form $\boxed{x^2 + px + q}$, die keine reellen Nullstellen haben, ausdrücken.

Vorgehensweise:

1. Ggf. Zähler und Nenner der echt gebrochen rationalen Funktion **kürzen**, bis sie keine gemeinsamen Teiler (Linearfaktoren) mehr enthalten. Dies kann auch zusammen mit dem 2. Schritt erfolgen. (Hierbei Änderung des Definitionsbereiches der Funktion beachten!) Es entsteht eine Funktion der Form

$$\boxed{y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i \cdot x^i}{\sum_{j=0}^{n} b_j \cdot x^j}} \quad \text{mit } n > m \text{ und } a_m, b_n \neq 0 \tag{1}$$

2. **Nenner** Q(x) der Funktion f(x) durch **Nullstellenbestimmung zerlegen** in
   a) **Linearfaktoren** und gegebenenfalls
   b) **quadratische Faktoren ohne reelle Wurzeln[3]**.

   Man erhält dadurch die Darstellung des Nenners in Produktform

$$\boxed{Q(x) = b_n \cdot \prod_k (x - x_{0k}) \cdot \prod_\ell (x^2 + p_\ell x + q_\ell)} \quad \text{mit } \boxed{k + 2\ell = n} \tag{2}$$

   Achtung: Den Faktor b_n beim Endergebnis nicht vergessen!

3. **Ansatz für die Partialbruchzerlegung aufstellen**.
   a) Für jeden unterschiedlichen **linearen Term** aus (2), **der u-mal auftritt,**

   u Partialbrüche der Form $\boxed{\frac{A_s}{(x - x_{ok})^s}}$ mit $\boxed{s = 1 \,..\, u}$. (3)

   b) Für jeden unterschiedlichen **quadratischen Term** aus (2), **der v-mal auftritt,**

   v Partialbrüche der Form $\boxed{\frac{A_t x + B_t}{(x^2 + p_\ell x + q_\ell)^t}}$ mit $\boxed{t = 1 \,..\, v}$. (4)

   Die Ausdrücke in den Zählern von (3) und (4) werden zunächst nur allgemein angesetzt. Alle Koeffizienten (hier mit A_μ und B_μ bezeichnet) müssen im Ansatz voneinander unterscheidbar bezeichnet werden!

   Beispiel:

$$\frac{\dots}{(x-3) \cdot (x+2)^3 \cdot (x^2 + x + 1)} = \frac{K_1}{(x-3)} + \frac{K_2}{(x+2)^1} + \frac{K_3}{(x+2)^2} + \frac{K_4}{(x+2)^3} + \frac{K_5 x + K_6}{(x^2 + x + 1)}$$

---

[1] Ist die Funktion unecht gebrochen rational, so ist zunächst der Polynomanteil abzutrennen.
[2] Der Fundamentalsatz der Algebra wird meist allgemeiner formuliert für Polynome, deren Koeffizienten auch komplex sein dürfen. Dann treten komplexe Nullstellen nicht mehr als konjugiert komplexe Paare auf.
[3] Statt in quadratische Faktoren kann man auch in Paare komplexer Linearfaktoren zerlegen. Dieser Ansatz wird hier nicht weiter verfolgt.