



Binomischer Satz sowie Binomische Formeln, Binomialkoeffizienten

Seite
1 von 1

© 2003 Prof. Dr.-Ing. T. Harriehausen, FH BS/WF

Version 1
29.9.2003

Betrachtet werden **Binome** (zweigliedrige Ausdrücke) der Form $(a + b)$ mit $a, b \in \mathbf{R}$, d.h. sowohl a als auch b können ein negatives Vorzeichen enthalten.

Aus der Schule bekannt sind die drei **binomischen Formeln**

$$1. (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2. (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$3. (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Die zweite binomische Formel ist ein einfacher Spezialfall der ersten ($b < 0$).

Die dritte binomische Formel spielt beim Rechnen mit komplexen Zahlen (für $a, b \in \mathbf{C}$) eine sehr wichtige Rolle (beim „konjugiert komplexen Erweitern“) und ist damit essentiell für die Berechnung von Wechselstromschaltungen.

Der **binomische Satz** liefert den Wert eines Ausdruckes $(a + b)^n$ mit $a, b \in \mathbf{R}$ und $n \in \mathbf{N}$:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n.$$

Die Ausdrücke $\binom{n}{k}$ sind die **Binomialkoeffizienten**, gesprochen „**n über k**“.

Binomialkoeffizienten sind für beliebige $n, k \in \mathbf{N}$ mit $k \leq n$ einfach¹ zu berechnen mittels

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}. \quad \text{Man setzt weiterhin } \binom{n}{k} = 0 \text{ für } k > n.$$

Die Binomialkoeffizienten lassen sich auch mit dem **Pascalschen² Dreieck**, siehe Bild 1,

ermitteln, das dem Bildungsgesetz $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ gehorcht:

n=	k = 0 ... n							
0								1
1							1	1
2					1	2	1	
3			1	3	3	1		
4		1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1
...								...

Bild 1: Pascalsches Dreieck

Aus Bild 1 folgt sofort: $\binom{0}{0} = \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ sowie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Für den Spezialfall $a = 1$, $b = x$ und $|x| \ll 1$ folgt aus dem binomischen Satz die wichtige Näherungsformel $(1+x)^n \approx 1+nx$, die nicht nur für $n \in \mathbf{N}$, sondern auch für $n \in \mathbf{R}$ gilt.

¹ Die Binomialkoeffizienten werden intensiv in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eingesetzt. Dort kann es für sehr große Werte von n oder k bei Verwendung dieser Formeln zu Problemen kommen.

² Benannt nach dem französischen Mathematiker und Philosophen Blaise Pascal (1623-1662), der es „erfand“. Das Prinzip war aber schon in Hochkulturen der Antike bekannt.